Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Comunicaciones

Orientación en Redes y Sistemas Inteligentes

# GUÍA PARA EL EXAMEN DE MATEMÁTICAS

- **Geometría Analítica**

***Problema 1***. La ecuación de una recta $\ell$ es $5x-7y+11=0$. Escribir la ecuación que representa a todas las rectas paralelas a $\ell$. A partir de esta última ecuación, encontrar la ecuación de la recta paralela a $\ell$ que pasa por el punto $(4,2)$.

***Problema 2.*** Un punto se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos dados es constante. Encontrar la ecuación de su lugar geométrico y verificar si es una circunferencia.

***Problema 3.*** La ecuación de un plano es

$$4x+6y+3z-12=0$$

Encontrar sus intercepciones con los ejes coordenados y las ecuaciones de sus trazas sobre los planos coordenados. Construir la figura.

***Nota:*** Recuérdese que una *intercepción* de una superficie sobre un eje coordenado es la coordenada correspondiente del punto de intersección de la superficie y el eje coordenado. Por otro lado, la *traza* de una superficie sobre un plano coordenado es la curva de intersección de la superficie y el plano coordenado.

- **Álgebra Lineal**

***Problema 1***. Operaciones con matrices.

a) Usando las siguientes matrices,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

comprobar que la siguiente identidad para matrices cuadradas $A$ y $B$ no es cierta. Nota: Para una matriz cuadrada $A$, se define $A^2=AA$.

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

b) Decir por qué la identidad anterior es incorrecta y dar la identidad correcta.

c) Se dice que una matriz cuadrada $A$ es ortogonal si $AA^T = A^T A = I$, donde $I$ es la matriz identidad. Para la siguiente matriz, encontrar los valores de $a$, $b$ y $c$ tal que es una matriz ortogonal. La solución no es única.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & c \end{bmatrix}$$

***Problema 2***. Se tienen los tres vectores siguientes en un espacio tridimensional

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Se desea escribir el vector $x = [1 \quad 4 \quad 7]^T$ como una combinación lineal de los vectores anteriores; esto es $x = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$.

a) Escribir el sistema de ecuaciones resultante.

b) Encontrar los valores de $a_1$, $a_2$ y $a_3$ utilizando el método de eliminación Gaussiana.

c) Encontrar los valores de $a_1$, $a_2$ y $a_3$ utilizando la regla de Cramer.

***Problema 3***. Espacios y subespacios vectoriales

a) Decir cuál de los siguientes conjuntos de vectores forman una base en el espacio tridimensional. Justificar la respuesta.

a.1) $\{(1,1,1), (1,2,3), (0,1,0)\}$

a.2) $\{(1,2,1), (4,1,3)\}$

a.3) $\{(1,0,2), (3,2,4), (2,1,3)\}$

a.4) $\{(1,1,3), (1,0,1), (1,1,0), (1,-1,1)\}$

b) Encontrar el rango de la siguiente matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 5 & 8 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

- **Cálculo Diferencial e Integral**

***Problema 1.*** Encontrar los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$

c) $\lim_{x\to\infty} (1 - x^{-2})^{x^2}$

***Problema 2.*** En el tiempo $t = 0$ un barco X se halla en reposo a 60 km al Este (E) del punto P y comienza a navegar hacia el Oeste (O) a razón de 10 km/h; otro barco Y se halla en reposo a 40 km al Sur (S) del punto P y comienza a navegar hacia el Sur (S) a razón de 20 km/h. Calcular en que tiempo la distancia $d$ entre ambos barcos será mínima y calcular cuál será esta distancia mínima. Nota: recuerde que distancia = velocidad × tiempo.

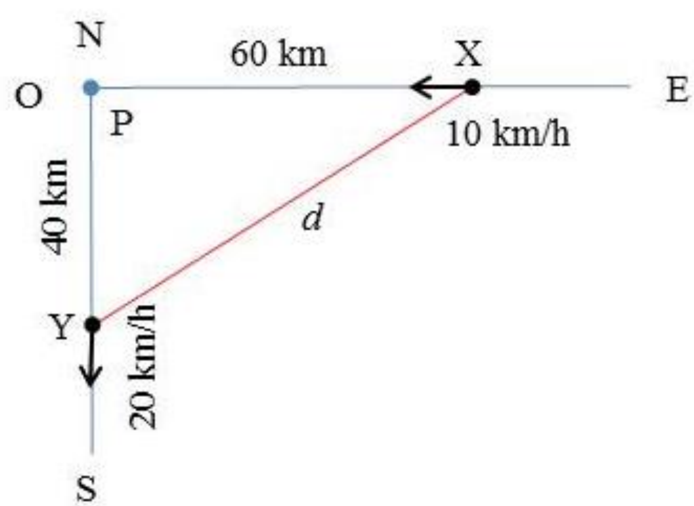


*Figura 1. Figura auxiliar para el Problema 2.*

***Problema 3.*** Encontrar las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{1-\operatorname{sen} x}\, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}\, dx$

- **Ecuaciones Diferenciales**

***Ejemplo 1. Familias de Curvas***

***Problema 1.*** Encontrar la ecuación diferencial de la familia de círculos que tienen sus centros sobre el eje *X*. Algunos miembros de la familia se encuentran representados en la Figura 2.

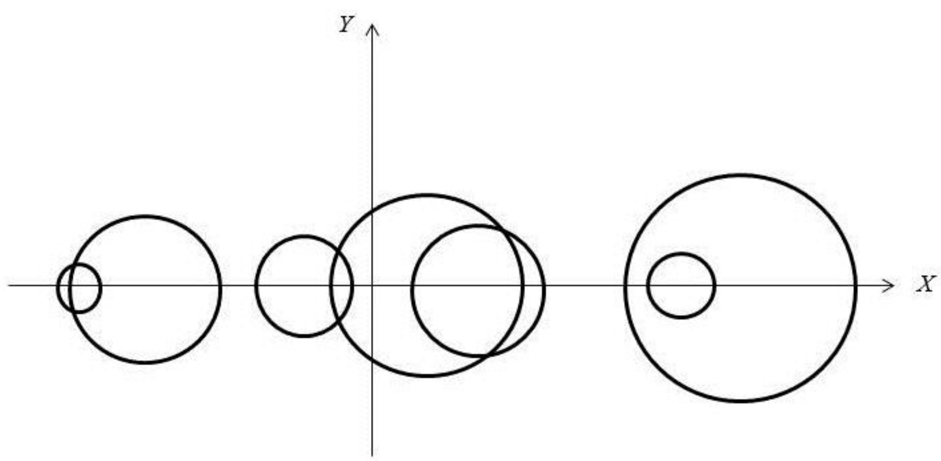


*Figura 2. Familia de círculos con centro sobre el eje X.*

***Ejemplo 2. Trayectorias Ortogonales***

*Familia de curvas.* Una familia de curvas puede definirse mediante la ecuación $f(x, y, a) = 0$ donde $a$ es un parámetro. Para cada valor del parámetro tenemos una curva de la familia.

*Ortogonalidad de curvas.* Sean $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ las ecuaciones de dos curvas en el plano. Se dice que estas curvas son ortogonales si en cada punto donde ellas se intersectan, sus tangentes son perpendiculares. En otras palabras, la pendiente $m_2$ de la segunda curva debe ser el recíproco negativo de la primera (y viceversa). Es decir, el producto de las pendientes debe ser igual a -1 ( $m_1 m_2 = -1$ ).

*Trayectorias ortogonales.* Se dice que las familias de curvas $f_1(x, y, a)$ y $f_2(x, y, a)$ son *trayectorias ortogonales* una respecto a la otra si para cada curva de la primera familia es ortogonal a cada curva de la segunda.

***Problema 2.*** Encontrar las trayectorias ortogonales a la familia de líneas rectas cuya pendiente y ordenada al origen son iguales.

***Ejemplo 3. Solución de Ecuaciones Diferenciales***

*Ecuaciones diferenciales de primer orden*

- Ecuaciones lineales: $y' + p(x)y = q(x)$
- Ecuaciones de Bernoulli: $y' + p(x)y = q(x)y^n$
- Ecuaciones homogéneas: $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$

  $p(\lambda x, \lambda y) = \lambda^K p(x, y)$ ; $q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^K q(x, y)$
- Ecuaciones separables: $p(x)dx + q(y)dy = 0$
- Ecuaciones exactas: $p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy = 0$

  $$\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x}$$

– Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Forma general: $a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 y = p(x)$

***Problema 3.*** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y' = x - 2xy$ (lineal)

b) $y' = y - xy^3 e^{-2x}$ (Bernoulli)

c) $2(2x^2 + y^2)dx - xydy = 0$ (homogénea)

d) $x^2 y\, y' = e^y$ (separable)

e) $\left(2xy - 3x^2\right)dx + \left(x^2 + 2y\right)dy = 0$ (exacta)

f) $\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2x^3 - 9x^2 + 6x$ (lineal de orden 2 con coeficientes constantes)

- **Cálculo Vectorial**

***Ejemplo 1. Aplicaciones a la Geometría***

En geometría, el Teorema de Apolonio o Teorema de la Mediana, es un teorema que relaciona la longitud de la mediana de un triángulo con las longitudes de sus lados.

*Definición de mediana.* Las medianas de un triángulo son cada uno de los tres segmentos que unen cada vértice con el punto medio de su lado opuesto al cual se asocia. Así, a cada lado corresponde su mediana. En el triángulo *ABC* de la Figura 3 el segmento $\overline{BD}$ es la mediana del lado *AC*, siendo $\overline{AD} = \overline{DC}$, esto es, *D* es el punto medio del lado *AC*.

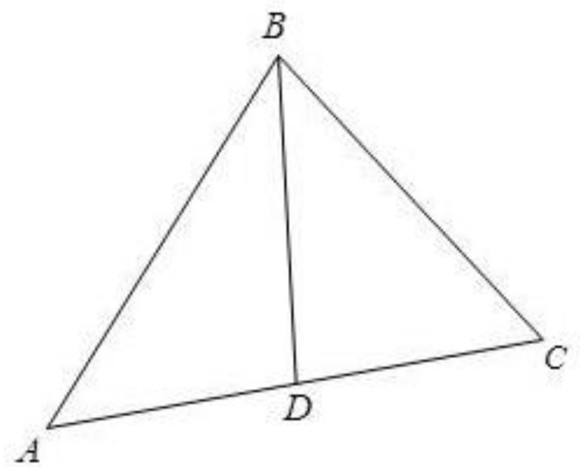


*Figura 3. Ilustración de la mediana del lado AC*

*Teorema de Apolonio.* Para todo triángulo la suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera es igual a la mitad del cuadrado del tercer lado más el doble del cuadrado de su mediana correspondiente.

***Problema 1.*** Probar el Teorema de Apolonio usando vectores.

***Ejemplo 2. Gradientes y Derivadas Direccionales***

***Problema 2.*** La altura de cierta montaña puede encontrarse mediante la ecuación $z = 1000 - 3x^2 - 2y^2$, con *x*, *y*, *z* medida en metros. Se desea trazar un camino a la cima de la montaña de tal forma que en el punto ($x = 1\,\mathrm{m}$, $y = 1\,\mathrm{m}$) la pendiente del mismo sea igual a 5%. ¿En qué dirección debe orientarse el camino a este punto?

***Ejemplo 3. Integrales de Línea***

***Problema 3.*** Evaluar la integral de línea

$$\int_C 2xyz\, dx + x^2 z\, dy + x^2 y\, dz$$

donde *C* es la recta que conecta al punto (1,1,1) con el punto (1,2,4).