Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Comunicaciones

Orientación en Redes y Sistemas Inteligentes

SOLUCIÓN A LOS PROBLEMAS DE LA GÚIA PARA EL EXAMEN DE MATEMÁTICAS

- **Geometría Analítica**

Problema 1. Sean dos rectas expresadas en su forma general como $Ax+By+C=0$ y $A'x+B'y+C'=0$. La condición para que estas rectas sean paralelas es que $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$, es decir, $AB'-A'B=0$. Entonces, para la recta ℓ del Problema 1

$$\frac{A}{5}=\frac{B}{-7}\text{ , o sea, } B=-\frac{7}{5}A$$

Por lo tanto, la ecuación de todas las rectas paralelas a ℓ es

$$Ax-\frac{7A}{5}y+C=0$$

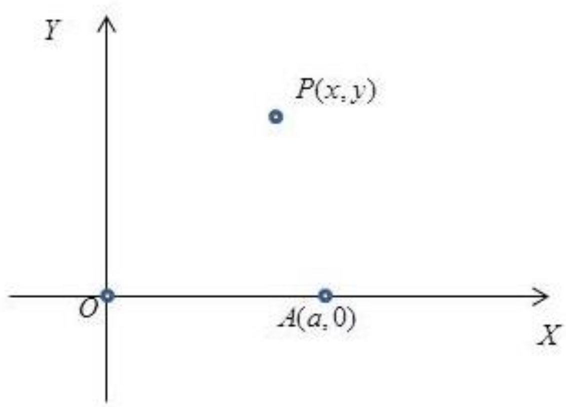
La cual también se puede expresar de la siguiente forma al multiplicar por 5 y dividir entre *A* todos los términos,

$$5x-7y+\frac{5C}{A}=0$$

Para el caso de una recta que pasa por el punto $(4,2)$, al sustituir estos valores en la ecuación anterior resulta que $\frac{5C}{A}=-6$, por lo que la ecuación de la recta paralela a ℓ y que pasa por (4,2) queda como

$$5x-7y-6=0$$

Problema 2. Por simplicidad, y sin ninguna restricción, se puede tomar el origen *O* como uno de los dos puntos y sea el otro punto $A(a,0)$, $a \neq 0$, sobre el eje *X*. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico, como se muestra en la figura siguiente:



De acuerdo con el enunciado del problema, *P* debe satisfacer la condición geométrica

$$\overline{PO}^2 + \overline{PA}^2 = k; \quad \text{con } k \text{ una constante positiva} \qquad (1)$$

Ahora bien, la distancia entre *P* y *O* es $\overline{PO} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$, es decir,

$$\overline{PO}^2 = x^2 + y^2 \qquad (2)$$

Similarmente,

$$\overline{PA}^2 = (x-a)^2 + y^2 \qquad (3)$$

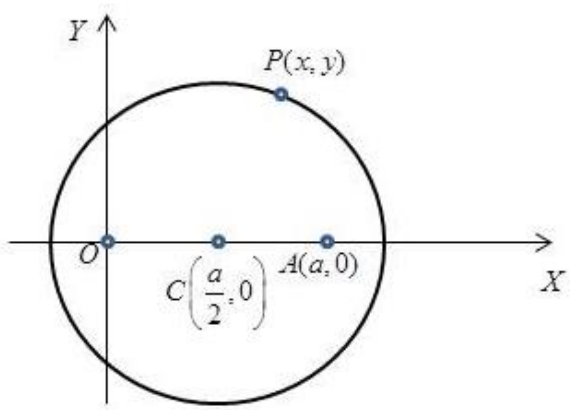
Así, sustituyendo (2) y (3) en (1) se tiene que,

$$x^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2 = k$$

Entonces,

$$x^2 + y^2 + x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - k = 0$$
$$2x^2 + 2y^2 - 2ax + a^2 - k = 0$$
$$x^2 + y^2 - ax + \frac{a^2}{2} - \frac{k}{2} = 0$$

Dado que una ecuación de la forma general $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ representa una circunferencia de radio diferente de cero si $D^2+E^2-4F>0$, entonces, se puede ver que de la expresión resultante del problema, $x^2+y^2-ax+\frac{a^2}{2}-\frac{k}{2}=0$, $D=a$, $E=0$ y $F=\frac{a^2}{2}-\frac{k}{2}$, así para que el lugar geométrico sea una circunferencia, se requiere que se cumpla la condición que $a^2-4\left(\frac{a^2}{2}-\frac{k}{2}\right)>0$, por lo tanto, si $k>\frac{a^2}{2}$ se tendría una circunferencia con centro $C\left(\frac{a}{2},0\right)$ y radio dado por el segmento $\overline{PC}=\frac{1}{2}\sqrt{2k-a^2}$ como se muestra en la siguiente figura:



Problema 3. Haciendo $y=z=0$ en la ecuación del plano del Problema 3 y despejando a *x*, se encuentra que la intercepción con el eje *X* es

$$4x-12=0$$
$$4x=12$$
$$\therefore\ x=3$$

De manera similar, la intercepción sobre el eje *Y*

$$6y-12=0$$
$$6y=12$$
$$\therefore\ y=2$$

Y la intercepción con el eje Z

$$\begin{aligned}&3z-12=0\\&3z=12\\&\therefore\ z=4\end{aligned}$$

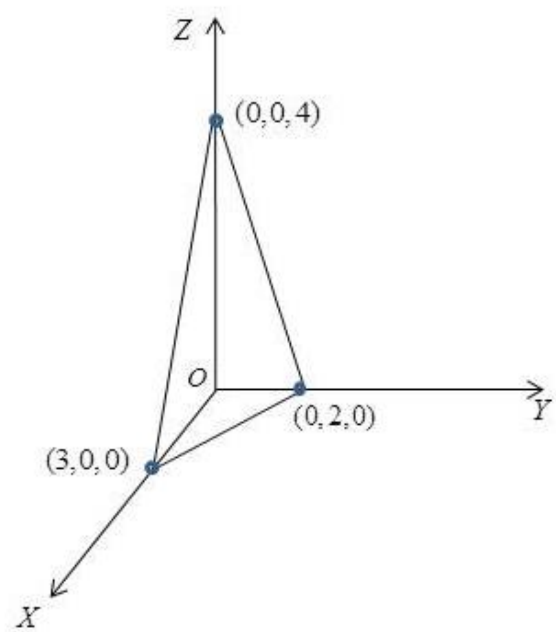
Para encontrar la ecuación de la traza sobre el plano XY, se hace $z=0$ en la ecuación del plano del problema, y de manera similar para las otras trazas, de tal forma que las ecuaciones de las trazas sobre los planos coordenados resultan como:

$$4x+6y-12=0 \qquad \text{sobre el plano } XY$$

$$4x+3z-12=0 \qquad \text{sobre el plano } XZ$$

$$6y+3z-12=0 \qquad \text{sobre el plano } YZ$$

Finalmente, la figura queda entonces como:



- ## Álgebra Lineal

Problema 1. Operaciones con matrices.

a) Usando las siguientes matrices,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

comprobar que la siguiente identidad para matrices cuadradas A y B no es cierta

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad A-B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad B^2 = BB = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$$

b) Decir por qué la identidad anterior es incorrecta y dar la identidad correcta.

La identidad correcta es

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

La identidad dada en el problema no es correcta porque la multiplicación de matrices no es conmutativa, esto es $AB \neq BA$.

c) Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal si $AA^T = A^TA = I$, donde I es la matriz identidad. Para la siguiente matriz, encontrar los valores de a, b y c tal que es una matriz ortogonal. La solución no es única.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & c \end{bmatrix}$$

Se calcula AA^T, y se iguala con la matriz identidad I.

$$AA^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & b \\ a & c \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+a^2 & b+ac \\ b+ac & b^2+c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualando los elementos correspondientes de las dos matrices,

$$1 + a^2 = 2$$

$$b + ac = 0$$

$$b^2 + c^2 = 2$$

De aquí,

$$a^2 = 1, \quad a = \pm 1$$

$$b = -ac, \quad b^2 = a^2c^2 = c^2$$

$$c^2 = 2 - b^2 = 2 - c^2$$

$$2c^2 = 2, \quad c^2 = 1, \quad c = \pm 1$$

Una solución posible es, por ejemplo, $a = 1$, $c = -1$ y $b = -ac = 1$. Con lo que la matriz buscada es

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Problema 2. Se tienen los tres vectores siguientes en un espacio tridimensional

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Se desea escribir el vector $x = [1 \quad 4 \quad 7]^T$ como una combinación lineal de los vectores anteriores; esto es $x = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$.

a) Escribir el sistema de ecuaciones correspondiente.

Se quiere que

$$\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1 + a_2\\a_1 + a_3\\-2a_2 + 3a_3\end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones equivalente es

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_1 + a_3 = 4$$

$$-2a_2 + 3a_3 = 7$$

b) Encontrar los valores de a_1, a_2 y a_3 utilizando el método de eliminación Gaussiana.

Se escribe la matriz de coeficientes de a_i y se aumenta con una columna del vector de constantes (los valores a la derecha de las ecuaciones anteriores).

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 4\\0 & -2 & 3 & 7\end{bmatrix}$$

A través de operaciones de fila elementales, se obtiene la matriz en forma escalonada equivalente.

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 4\\0 & -2 & 3 & 7\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\0 & -1 & 1 & 3\\0 & -2 & 3 & 7\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\0 & -1 & 1 & 3\\0 & 0 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

Primero se utiliza la fila 1 para hacer cero el elemento 1 de la fila 2. Así, en el desarrollo de arriba, la fila 2 se reemplaza por la fila

$$(-1) \times [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1] + 1 \times [1 \quad 0 \quad 1 \quad 4] = [0 \quad -1 \quad 1 \quad 3]$$

La fila 3 se deja igual porque ya tiene un cero en el elemento 1. Luego, se utiliza la fila 2 para hacer cero el elemento 2 de la fila 3. Así, la fila 3 se reemplaza por

$$2 \times [0 \quad -1 \quad 1 \quad 3] + (-1) \times [0 \quad -2 \quad 3 \quad 7] = [0 \quad 0 \quad -1 \quad -1]$$

Como segunda parte del algoritmo, a través de operaciones de fila elementales, se obtiene la matriz en forma escalonada reducida equivalente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Primero se utiliza la fila 3 para hacer cero el elemento 3 de la fila 2. Así, en el desarrollo de arriba, la fila 2 se reemplaza por la fila

$$(-1) \times [0 \quad 0 \quad -1 \quad -1] + (-1) \times [0 \quad -1 \quad 1 \quad 3] = [0 \quad 1 \quad 0 \quad -2]$$

La fila 1 se deja igual porque ya tiene un cero en el elemento 3. Luego, se utiliza la fila 2 para hacer cero el elemento 2 de la fila 1. Así, la fila 1 se reemplaza por

$$(-1) \times [0 \quad 1 \quad 0 \quad -2] + 1 \times [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1] = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 3]$$

Finalmente, se escala cada fila para que su primer elemento distinto de cero sea igual a 1. En este caso, sólo la fila 3 se multiplica por -1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

De la matriz escalonada reducida, directamente se encuentra el resultado final.

$$a_1 = 3, a_2 = -2, a_3 = 1$$

Es fácil comprobar que, efectivamente,

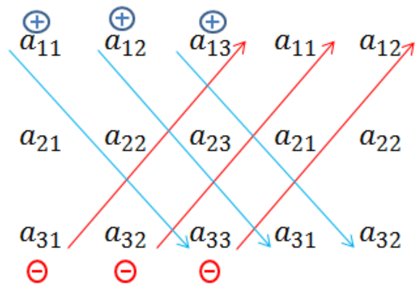
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 + a_3 \\ -2a_2 + 3a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2 \\ 3 + 1 \\ 4 + 3 \end{bmatrix}$$

c) Encontrar los valores de a_1, a_2 y a_3 utilizando la regla de Cramer.

Sea A la matriz de coeficientes y $A_i, i = 1,2,3$ la matriz que se obtiene de A al sustituir la columna *i* por el vector de constantes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}; A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 3 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Para calcular el determinante de estas matrices, utilizamos la regla de Sarrus.



$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (0+0+0) - (0-2+3) = -1$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (0+7+0) - (0-2+12) = -3$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = (12+0+0) - (0+7+3) = 2$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = (0+0-2) - (0-8+7) = -1$$

Por la regla de Cramer

$$a_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-3}{-1} = 3, a_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{2}{-1} = -2, a_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Problema 3. Espacios y subespacios vectoriales

a) Decir cuál de los siguientes conjuntos de vectores forman una base en el espacio tridimensional. Justificar la respuesta.

Un conjunto S de vectores forma una base para un espacio V si: (1) S es linealmente independiente y (2) S genera a V.

Por otra parte, si U es una matriz cuadrada cuyas columnas son los vectores de S, S es linealmente dependiente si existe un vector columna X distinto de cero que es solución del sistema homogéneo $UX = 0$; y esto ocurre si y sólo si $|U| = 0$.

a.1) $\{(1,1,1),(1,2,3),(0,1,0)\}$

La matriz U de vectores de S, y su determinante son

$$U=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$|U|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=-1\times\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-1(3-1)=-2$$

Así, este conjunto de vectores es linealmente independiente y genera el espacio tridimensional, por lo que forma una base en este espacio.

a.2) $\{(1,2,1),(4,1,3)\}$

Un conjunto de dos vectores no puede generar el espacio tridimensional; a lo más puede generar un espacio bidimensional. Por lo tanto, este conjunto de vectores no forma una base en el espacio tridimensional.

a.3) $\{(1,0,2),(3,2,4),(2,1,3)\}$

La matriz U de vectores de S, y su determinante (por la regla de Sarrus) son

$$U=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

$$|U|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{vmatrix}=(6+6+0)-(8+4+0)=0$$

Así, este conjunto de vectores es linealmente dependiente, por lo que no forma una base en el espacio tridimensional.

a.4) $\{(1,1,3),(1,0,1),(1,1,0),(1,-1,1)\}$

Un conjunto de cuatro vectores en el espacio tridimensional no pude ser linealmente independiente; si tres de ellos son linealmente independientes, el cuarto de ellos se puede formar como una combinación lineal de los primeros tres. Por lo que este conjunto de vectores no forma una base en este espacio.

b) Encontrar el rango de la siguiente matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 5 & 8 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Como se explica más a detalle en el problema 2(b), se obtiene la matriz en forma escalonada equivalente a través de operaciones de fila elementales.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 5 & 8 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las operaciones elementales para la sustitución de filas se muestran a continuación en el orden en que se utilizan.

$$(-4) \times [1 \quad 1 \quad 2] + 1 \times [4 \quad 5 \quad 5] = [0 \quad 1 \quad -3]$$

$$(-5) \times [1 \quad 1 \quad 2] + 1 \times [5 \quad 8 \quad 1] = [0 \quad 3 \quad -2]$$

$$1 \times [1 \quad 1 \quad 2] + 1 \times [-1 \quad -2 \quad 2] = [0 \quad -1 \quad 4]$$

$$(-3) \times [0 \quad 1 \quad -3] + 1 \times [0 \quad 3 \quad -2] = [0 \quad 0 \quad 7]$$

$$1 \times [0 \quad 1 \quad -3] + 1 \times [0 \quad -1 \quad 4] = [0 \quad 0 \quad 1]$$

$$(-1) \times [0 \quad 0 \quad 7] + 7 \times [0 \quad 0 \quad 1] = [0 \quad 0 \quad 0]$$

La matriz en forma escalonada obtenida tiene tres filas distintas de cero, por lo que el rango de la matriz es precisamente 3.

- **Cálculo Diferencial e Integral**

Problema 1. Encontrar los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$

El límite es de la forma $\infty \cdot 0$. Primero se convierte en un límite del tipo ∞/∞, al cual se le aplica la regla de L'Hopital dos veces, porque la primera sigue siendo del tipo ∞/∞.

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$

Se analizan los casos cuando el límite tiende a cero por la izquierda y por la derecha.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$$

Como estos límites no son iguales, el límite cuando $x \to 0$ no existe.

c) $\lim_{x\to\infty}(1-x^{-2})^{x^2}$

El límite es de la forma 1^∞. Primero se convierte en un límite del tipo $\infty \cdot 0$ tomando el logaritmo, luego a uno del tipo $0/0$.

$$y = (1-x^{-2})^{x^2}$$

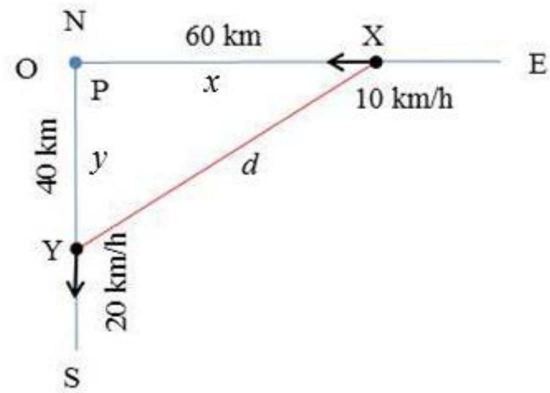
$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} x^2 \ln(1-x^{-2}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1-x^{-2})}{x^{-2}}$$

A este límite se le aplica la regla de L'Hopital para obtener

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^{-3}}{(1-x^{-2})(-2x^{-3})} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{(1-x^{-2})} = -1$$

$$\lim_{x\to\infty}(1-x^{-2})^{x^2} = \lim_{x\to\infty} y = e^{-1}$$

Problema 2. En el tiempo $t = 0$, un barco X se halla en reposo a 60 km al Este (E) del punto P y comienza a navegar hacia el Oeste (O) a razón de 10 km/h; otro barco Y se halla en reposo a 40 km al Sur (S) del punto P y comienza a navegar hacia el Sur (S) a razón de 20 km/h. Calcular en que tiempo la distancia *d* entre ambos barcos será mínima y calcular cuál será esta distancia mínima. Nota: recuerde que distancia = velocidad × tiempo.



Sean *x* y *y* las distancias de los barcos X y Y al punto P, respectivamente, y sea *t* el tiempo en horas.

$$d^2(t) = x^2(t)+y^2(t) = (60 - 10t)^2 + (40 + 20t)^2$$

La distancia $d(t)$ será mínima cuando $d^2(t)$ sea mínima. Así, se deriva la ecuación anterior con respecto a *t*, y se iguala el resultado a cero; de allí se despeja el tiempo donde hay un punto crítico.

$$\frac{d\ d^2(t)}{dt} = 2(60 - 10t)(-10) + 2(40 + 20t)(20) = 400 + 1000t = 0$$

$$t = -\frac{2}{5}$$

Este punto crítico no es físicamente válido ya que los barcos se encuentran en reposo antes de $t = 0$. Por otra parte, la segunda derivada de $d^2(t)$ es 1000 para todo *t*; así, la función tiene un solo mínimo, es cóncava y es creciente para $t > -2/5$. Por lo tanto, el tiempo en que la distancia es mínima debe encontrarse en los límites físicos del problema; en este caso, en $t = 0$. En este instante, la distancia entre los barcos es mínima y es

$$d(0) = \sqrt{60^2 + 40^2} = 72.11 \text{ Km.}$$

Problema 3. Encontrar las siguientes integrales.

a) $\int \text{sen}^2 x\ dx$

Se integra por partes. Se hace $u = \text{sen}\ x$ y $dv = \text{sen}\ x\ dx$, con lo que

$$du = \cos x\ dx \quad \text{y} \quad v = -\cos x$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x\, dx$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\, dx$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \int dx - \int \operatorname{sen}^2 x\, dx$$

La segunda integral del lado derecho se pasa al lado izquierdo.

$$2\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \int dx = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + x$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

b)$\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$

Se integra por partes. Se hace $u = \operatorname{sen}(\ln x)$ y $dv = dx$, con lo que

$$du = \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx \quad \text{y} \quad v = x$$

$$\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx = x \operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx$$

Se integra por partes ahora la integral de la derecha. Se hace $u = \cos(\ln x)$ y $dv = dx$, con lo que

$$du = -\frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\, dx \quad \text{y} \quad v = x$$

$$\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx = x \operatorname{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$$

$$2\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx = x \operatorname{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x)$$

$$\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx = \frac{1}{2}x(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$$

c) $\int \frac{\cos^3 x}{1-\operatorname{sen} x}\, dx$

Se hace el cambio de variable $u = \operatorname{sen} x$, con lo que $du = \cos x\, dx$

$$\int \frac{\cos^3 x}{1-\operatorname{sen} x}\, dx = \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\, dx = \int \frac{(1-u^2)}{1-u}\, du$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{1-\operatorname{sen} x}\, dx = \int \frac{(1+u)(1-u)}{1-u}\, du = \int (1+u)\, du = u + \frac{u^2}{2}$$

Se sustituye $u = \operatorname{sen} x$

$$\int \frac{\cos^3 x}{1-\operatorname{sen} x}\, dx = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$$

d) $\int \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}\, dx$

Se realiza una descomposición en fracciones parciales. El grado del numerador es menor que el grado del denominador, así que el integrando representa una función propia. En el denominador se tiene un factor cuadrático irreducible con una repetición de dos, así

$$\frac{2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$2x^3 = (Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)$$

$$2x^3 = Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx + D$$

Para encontrar las constantes, igualamos los coeficientes de potencias iguales de ambos lados de la ecuación.

$$2 = A$$

$$0 = B$$

$$0 = A + C$$

$$0 = B + D$$

La solución de este sistema de ecuaciones da $A = 2, B = D = 0, C = -2$. Así,

$$\frac{2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)} - \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\int \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{2x}{(x^2+1)}\,dx - \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Se hace el cambio de variable $u = x^2 + 1$, con lo que $du = 2x\,dx$.

$$\int \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du - \int \frac{1}{u^2}\,du$$

Se tiene que $u = x^2 + 1 > 0$, entonces

$$\int \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}\,dx = \ln u - \frac{u^{-1}}{-1} = \ln u + \frac{1}{u}$$

Se sustituye $v = x^2 + 1$

$$\int \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}\,dx = \ln(x^2+1) + \frac{1}{(x^2+1)} + C$$

- **Ecuaciones Diferenciales**

Problema 1. La ecuación general de una circunferencia que tiene su centro sobre el eje *X* se puede escribir como

$$(x-h)^2 + y^2 = r^2. \qquad (1)$$

La ecuación anterior depende de dos parámetros por lo que para eliminarlos y encontrar la ecuación diferencial de la familia tenemos que diferenciar dos veces. La primera derivada nos lleva a

$$2(x-h) + 2yy' = 0. \qquad (2)$$

Despejando el parámetro *h* obtenemos

$$h = x + yy' \qquad (3)$$

Derivando por segunda vez llegamos a

$$1 + yy' + (y')^2 = 0 \tag{4}$$

que es la ecuación diferencial buscada.

Problema 2. Las líneas rectas cuya pendiente y ordenada al origen son iguales pueden representarse mediante la siguiente ecuación

$$y = ax + a \tag{1}$$

siendo a un parámetro. La ecuación diferencial de la familia se encuentra mediante los siguientes pasos

$$a = \frac{y}{x+1} \tag{2}$$

Diferenciando llegamos a

$$0 = \frac{(x+1)dy - ydx}{(x+1)^2} \tag{3}$$

que después de reducir, queda como

$$(x+1)dy - ydx \tag{4}$$

que es la ecuación diferencial de la familia. La ecuación anterior puede escribirse también como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} \tag{5}$$

Ahora, la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales está a partir de (5) dada por

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+1}{y} \tag{6}$$

La ecuación (6) puede reescribirse como

$$ydy + (x+1)dx = 0 \tag{7}$$

que es una ecuación separable. Su solución es

$$y^2+(x+1)^2=r^2 \tag{8}$$

donde r^2 es una constante. Por lo tanto, las trayectorias ortogonales a la familia de líneas rectas que tiene pendiente y ordenada al origen iguales son las circunferencias que tienen su centro en el punto (-1,0).

Problema 3. En esta sección c, c_1, c_2, d_0, d_1, d_2 y d_3 representan constantes arbitrarias.

a) $y'=x-2xy$

La ecuación tiene un factor de integración

$$z(x)=e^{\int 2xdx}=e^{x^2} \tag{1}$$

Aplicando el factor de integración a la ecuación obtenemos

$$z(x)y'=xz(x)-2xyz(x) \tag{2}$$

$$e^{x^2}y'+2xye^{x^2}=xe^{x^2} \tag{3}$$

que puede reescribirse como

$$e^{x^2}dy+2xe^{x^2}ydx=xe^{x^2}dx \tag{4}$$

pero el lado izquierdo es una diferencial exacta, entonces

$$d\left(ye^{x^2}\right)=xe^{x^2}dx \tag{5}$$

Integrando ambos lados de la ecuación (5), llegamos a

$$ye^{x^2}=\frac{1}{2}e^{x^2}+c \tag{6}$$

y finalmente

$$y=\frac{1}{2}+ce^{-x^2} \tag{7}$$

b) $y' = y - xy^3 e^{-2x}$

La ecuación puede reescribirse como

$$dy - ydx + xy^3 e^{-2x} dx = 0 \tag{1}$$

o también como

$$y^{-3} dy - y^{-2} dx + xe^{-2x} dx = 0 \tag{2}$$

o equivalentemente como

$$-2y^{-3} dy + 2y^{-2} dx - 2xe^{-2x} dx = 0 \tag{3}$$

Aplicando el cambio de variable $z = y^{-2}$, $dz = -2y^{-3} dy$, obtenemos

$$dz + 2zdx = 2xe^{-2x} dx \tag{4}$$

Usando el factor integrante

$$w(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x} \tag{5}$$

en la ecuación (4) llegamos a

$$e^{2x} dz + 2ze^{2x} dx = 2xdx \tag{6}$$

La expresión a la izquierda de la igualdad en la ecuación (6) es una diferencial exacta, por lo tanto

$$d\left(ze^{2x}\right) = 2xdx \tag{7}$$

Integrando ahora la ecuación (7) llegamos a

$$ze^{2x} = x^2 + c \tag{8}$$

pero $z = y^{-2}$, entonces

$$y^2 = \frac{e^{2x}}{x^2 + c} \tag{9}$$

c) $2(2x^2+y^2)dx - xy\,dy = 0$

Hagamos el cambio de variable $y = zx$, entonces

$$2(2x^2+z^2x^2)dx - zx^2(zdx+xdz) = 0 \tag{1}$$

Removiendo el factor x^2 llegamos a

$$2(z^2+2)dx - z^2dx - zxdz = 0 \tag{2}$$

simplificando

$$(z^2+4)dx - zxdz = 0 \tag{3}$$

o equivalentemente

$$\frac{dx}{x} - \frac{zdz}{z^2+4} = 0 \tag{4}$$

Integrando la expresión anterior, obtenemos

$$\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(z^2+4) = c_1 \tag{5}$$

Reacomodando términos llegamos a

$$\ln\left(\frac{x^2}{z^2+4}\right) = c_2 \qquad (c_2 = 2c_1) \tag{6}$$

pero recordemos que se hizo la sustitución $y = zx$, entonces revirtiendo la sustitución mediante $z = y/x$, la ecuación (6) se transforma en

$$\ln\left(\frac{x^2}{\frac{y^2}{x^2}+4}\right) = \ln\left(\frac{x^4}{y^2+4x^2}\right) = c_2 \tag{7}$$

que puede reescribirse como

$$x^4 = c^2(y^2+4x^2) \qquad (c^2 = e^{c_2}) \tag{8}$$

que es la solución de la ecuación diferencial.

d) $x^2 y\, y' = e^y$

La ecuación anterior puede reescribirse como

$$ye^{-y}dy = \frac{dx}{x^2} \tag{1}$$

La ecuación es por lo tanto separable. Integrando obtenemos

$$-ye^{-y} - e^{-y} = \frac{-1}{x} + c_1 \tag{2}$$

y reacomodando términos llegamos a

$$x(y+1) = (cx+1)e^y \tag{3}$$

que es la solución buscada.

e) $\left(2xy - 3x^2\right)dx + \left(x^2 + 2y\right)dy = 0$

Vamos a verificar si la ecuación es exacta

$$\frac{\partial(2xy - 3x^2)}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial(x^2 + 2y)}{\partial x} = 2x$$

Por lo tanto, la ecuación es exacta. Entonces sabemos que existe una función $f(x,y)$ tal que la solución de la ecuación diferencial está dada por $f(x,y) = c$. La función $f(x,y)$ debe cumplir con las siguientes relaciones

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy - 3x^2 \tag{1}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + 2y \qquad (2)$$

Integrando la ecuación (1) obtenemos

$$f(x,y) = x^2 y - x^3 + g(y) \qquad (3)$$

donde $g(y)$ es una función arbitraria que depende solo de y. Ahora, derivando parcialmente (3) con respecto a y obtenemos

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + g'(y) \qquad (4)$$

Comparando (4) con (2), concluimos que

$$g'(y) = 2y$$

de donde

$$g(y) = y^2$$

y usando (3), la función buscada es

$$f(x,y) = x^2 y - x^3 + y^2 \qquad (5)$$

y la solución de la ecuación diferencial es

$$x^2 y - x^3 + y^2 = c \qquad (6)$$

f) $\dfrac{d^2 y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 2x^3 - 9x^2 + 6x$

Reescribiendo la ecuación haciendo uso del operador diferencial obtenemos

$$(D^2 - 3D + 2)y = 2x^3 - 9x^2 + 6x \qquad (1)$$

La ecuación auxiliar es evidentemente

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \qquad (2)$$

cuya factorización es

$$(z-1)(z-2)=0\,. \tag{3}$$

Por lo tanto, la solución homogénea es

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}\,. \tag{4}$$

Tomando en cuenta la forma de la función de excitación, la solución particular puede escribirse

$$y_p = d_3 x^3 + d_2 x^2 + d_1 x + d_0 \tag{5}$$

Sustituyendo la solución particular en (5) directamente en la ecuación diferencial, llegamos a

$$(D^2 - 3D + 2)y_p = 2x^3 - 9x^2 + 6x \tag{6}$$

Desarrollando

$$6d_3 x + 2d_2 - 9d_3 x^2 - 6d_2 x - 3d_1 + 2d_3 x^3 + 2d_2 x^2 + 2d_1 x + 2d_0 = 2x^3 - 9x^2 + 6x \tag{7}$$

Igualando coeficientes de potencias semejantes formamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} &2d_3 = 1 \\ &-9d_3 + 2d_2 = -9 \\ &6d_3 - 6d_2 + 2d_1 = 6 \\ &2d_2 - 3d_1 + 2d_0 = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

La solución del sistema de ecuaciones en (8) es

$$d_0 = d_1 = d_2 = 0 \quad ; \quad d_3 = 1 \tag{9}$$

Así, la solución particular se obtiene sustituyendo (9) en (4) resultando

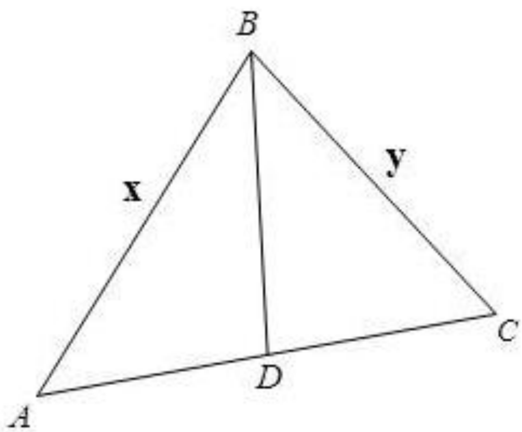
$$y_p = x^3 \tag{10}$$

La solución general de la ecuación diferencial es la suma de las soluciones homogénea y particular, así

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^3 . \qquad (11)$$

- **Cálculo Vectorial**

Problema 1. En el triángulo ABC de la figura,



sea el segmento $\overline{BD}$ la mediana del lado AC. Algebraicamente el Teorema de Apolonio se puede escribir mediante la siguiente ecuación $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{BD}^2 + \frac{1}{2}\overline{AC}^2$.

Sea el vector $\mathbf{x} = \overrightarrow{BA}$ y el vector $\mathbf{y} = \overrightarrow{BC}$, entonces

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = \mathbf{x}$$

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \mathbf{y}$$

Pero $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC}$, por lo tanto, $2\overrightarrow{BD} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. También, $\mathbf{x} + \overrightarrow{AC} = \mathbf{y}$, por lo tanto, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$.

Ahora,

$$\overline{BD}^2 = \overrightarrow{BD} \bullet \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \bullet \frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \frac{1}{4}\left(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + 2\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}\right)$$

y también

$$\overline{AC}^2 = \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC} = (\mathbf{y}-\mathbf{x}) \bullet (\mathbf{y}-\mathbf{x}) = \left(|\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x}|^2 + 2\mathbf{y} \bullet \mathbf{x} \right).$$

Usando los resultados anteriores en el término de la derecha que describe el Teorema de Apolonio, tenemos que

$$\begin{aligned} 2\overline{BD}^2 + \frac{1}{2}\overline{AC}^2 &= 2\left[\frac{1}{4}\left(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + 2\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \right) \right] + \frac{1}{2}\left[|\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x}|^2 - 2\mathbf{y} \bullet \mathbf{x} \right] \\ &= |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 \\ &= \overline{BA}^2 + \overline{BC}^2 \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar.

Problema 2. La altura de la montaña en cualquier punto (x, y) del plano de referencia horizontal está dada por $z(x, y) = 1000 - 3x^2 - 2y^2$. El gradiente de la función anterior está dado por

$$\begin{aligned} \nabla z(x, y) &= \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}\,\hat{i} + \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\,\hat{j} \\ &= -6x\,\hat{i} - 4y\,\hat{j} \end{aligned}$$

En el punto $(1,1)$ el vector gradiente es

$$\nabla z(x, y)\big|_{(1,1)} = -6\,\hat{i} - 4\,\hat{j}$$

Se desea ahora encontrar la dirección en la que la pendiente del camino sea igual a 5%. Sea el vector $\mathbf{r} = a\,\hat{i} + b\,\hat{j}$ aquel que nos indica la orientación deseada. Sus componentes (a, b) deben elegirse para cumplir con el requerimiento deseado. Usando el gradiente de la función de altura y el vector de orientación, la pendiente es igual a

$$\nabla z(x, y) \bullet \mathbf{r} = \left(-6\,\hat{i} - 4\,\hat{j} \right) \bullet \left(a\,\hat{i} + b\,\hat{j} \right) = -6a - 4b$$

Y como deseamos que la pendiente sea igual a 5%, observamos que a y b deben cumplir con la siguiente ecuación:

$$-6a-4b=0.05 \tag{1}$$

Por otra parte, el vector de orientación debe ser unitario, por lo que también se debe cumplir

$$a^2+b^2=1 \tag{2}$$

La solución simultánea de las ecuaciones (1) y (2) se puede obtener como sigue. Despejando *a* de (1) tenemos que

$$a=-\left(\frac{0.05+4b}{6}\right) \tag{3}$$

Sustituyendo (3) en (2)

$$\left(\frac{0.05+4b}{6}\right)^2+b^2=1 \tag{4}$$

Desarrollando y simplificando

$$(0.05)^2+8(0.05)b+16b^2+36b^2=36$$

$$52b^2+0.4b-35.9975=0 \tag{5}$$

Las soluciones de la ecuación cuadrática en (5) son

$$b_1=-0.8359\,,\ b_2=0.8282 \tag{6}$$

Con los correspondientes valores para *a* iguales a

$$a_1=0.5489\,,\ a_2=-0.5605 \tag{7}$$

Por lo tanto, tenemos dos orientaciones que cumplen con el requerimiento deseado que están dadas por los vectores unitarios

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1&=0.5489\,\hat{i}-0.8359\,\hat{j}\\ \mathbf{r}_2&=-0.5605\,\hat{i}+0.8282\,\hat{j}\end{aligned} \tag{8}$$

Problema 3. La recta C puede parametrizarse de la forma

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1+t \\ z &= 1+3t \end{aligned} \tag{1}$$

Donde t es un parámetro real que varía entre 0 y 1. Para $t=0$; $x=1$, $y=1$, $z=1$ (que es el primer punto), mientras que para $t=1$; $x=1$, $y=2$, $z=4$ (que es el segundo punto). Con la parametrización indicada en (1) encontramos que

$$\begin{aligned} dx &= 0 \\ dy &= dt \\ dz &= 3dt \end{aligned} \tag{2}$$

Usando (1) y (2), la integral de línea deseada

$$\int_C 2xyz\,dx + x^2 z\,dy + x^2 y\,dz$$

puede reescribirse como

$$\int_0^1 (1+3t)dt + \int_0^1 (1+t)3dt = 2.5 + 4.5 = 7\,.$$

La integral de línea tiene por lo tanto el valor de 7.